I.E. CHAMPAGNAT PINARES DE ORIENTE

GUIA DE ESTUDIO – CHAMPAGNAT APRENDE EN CASA

DOCENTE	JONATAN A. RIVERA	**ÁREA**	MATEMÁTICAS - TECNOLOGÍA
E-MAIL	jorivera@fmsnor.org	**GRADO**	NOVENO (9º)

GUIA DE ESTUDIO (03)

DBA	**D.B.A. 1:** Utiliza los números reales (sus operaciones, relaciones y propiedades) para resolver problemas con expresiones polinómicas. **TECNOLOGÌA:** Utilizo eficientemente la tecnología en el aprendizaje de otras disciplinas (artes, educación física, matemáticas, ciencias)		
LOGRO	Soluciono situaciones problema en contexto real, usando la representación, propiedades y operaciones entre números Reales y estudio estadístico con datos no agrupados.		
COMPETENCIA	Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.		
OBJETIVO	Solucionar situaciones problema haciendo uso de software apropiado para dar respuesta a las operaciones entre el conjunto de los números complejos.		
CONCEPTO	Valor – Relación	**EJE**	✓ Así soy yo
TEMA	Tema 3: **Números Complejos**	**FECHA DE PUBLICACIÓN.**	lunes, 15 de marzo de 2021
TIEMPO DE TRABAJO	**2 Semanas**	**FECHA DE ENTREGA**	**viernes, 26 de marzo de 2021**

VALOR DE LA SEMANA: AMABILIDAD

La belleza de las personas nace de este valor tan hermoso y valioso llamado amabilidad. Quizás en nuestra educación no hayamos recibido tanta amabilidad como nos habría gustado, sin embargo, tenemos la capacidad para educar a nuestros hijos en **el valor de la** **amabilidad**. Veamos cuál es la actitud a tomar para ser amables y transmitir amabilidad.

Todos conocemos o hemos conocido personas que **con sus actos son capaces de emocionar**, de cambiar nuestras vidas y darnos valiosas lecciones. La belleza de estas personas está reflejada en cómo tratan a los demás,

como ayudan desinteresadamente, y cómo siempre tienen una luz en su mirada capaz de guiar a la persona más errante e indecisa.

«Una persona amable es aquella que escucha con una sonrisa lo que ya sabe, de labios de alguien que no lo sabe.»

Alfred Capus.

DOCENTE	JONATAN A. RIVERA	**ÁREA**	MATEMÁTICAS - TECNOLOGÍA
E-MAIL	jorivera@fmsnor.org	**GRADO**	NOVENO (9º)

GUIA DE ESTUDIO (03)

TEMA	NÚMEROS COMPLEJOS

INTRODUCCIÓN

LAS TRIBULACIONES DEL ESTUDIANTES TÖRLESS

- Dime, ¿entendiste bien todo esto?
- ¿Qué?
- Ese asunto de los números imaginarios.
- Sí, no es tan difícil. Lo único que hay que tener presente es que la raíz cuadrada de menos uno es la unidad de cálculo.
- De eso precisamente se trata. Tal cosa no existe. Todo número, ya sea positivo, ya sea negativo, da como resultado, si se lo eleva al cuadrado, algo positivo. Por eso no puede haber ningún número real que se la raíz cuadrada de algo negativo.
- Completamente cierto. Pero ¿por qué, de todos modos, no habría intentarse también a un número negativo la operación de la raíz cuadrada? Desde luego que el resultado no puede tener ningún valor real; por eso el resultado se llama *Imaginario.* Es como cuando uno dice: *aquí, antes, siempre se sentaba alguien;* pongámosle hoy entonces una silla. Y aun cuando la persona haya muerto, obramos como si todavía pudiera acudir a nosotros.
- Pero, ¿Cómo puede hacerse tal cosa, cuando se sabe, con toda precisión matemática, que es imposible?
- a pesar de ello se hace precisamente como si fuera posible. Quizás pueda obtenerse algún resultado. ¿Y qué otra cosa ocurre, a fin de cuentas, como los números irracionales? Una división que nunca termina, una fracción cuyo valor nunca puedes agotar, aun cuando te pases la vida haciendo la operación. Y, ¿qué piensas de las paralelas, que se cortan en el infinito? Creo que no habría matemáticas si pretendiéramos saberlo todo a conciencia y exactamente.
- En eso tiene razón, cuando uno considera las cosas así, todo parece bastante correcto; pero lo curioso está precisamente en que se pueden hacer cálculos reales y se puede llegar por fin a un resultado comprensible con semejantes valores imaginarios, que de alguna manera son imposibles […]
- Considero muy posible que aquí los inventores de las matemáticas hayan dado un traspiés. Porque, en efecto, ¿por qué aquello que está más allá de nuestro entendimiento no podría permitirse gastarle precisamente semejante broma al entendimiento? Pero la cuestión no me preocupa mucho, pues sé que todas estas cosas no conducen a nada.

Robert Musil

Tomado de *matemáticas I*. 1 eso. España. Editorial Santillana.

NÚMEROS IMAGINARIOS

Las ecuaciones de la forma $x^2 + a = 0$, con *a* real positivo, no tienen solución en el conjunto numérico de los números reales porque el cuadrado de un número real es un número no negativo y al ser sumado con un número positivo su resultado no es cero.

Para dar solución a este tipo de ecuaciones, se generó un nuevo conjunto numérico denominado ***números imaginarios.***

La unidad principal o unidad imaginaria está representada por la letra $\boldsymbol{i}$, donde $i^2 = -1$ y así $i = \sqrt{-1}$.

Los números imaginarios que se expresan como el producto de un número real por la unidad imaginaria reciben el nombre de *números imaginarios puros*.

Ejemplos: Escribir las siguientes raíces como números imaginarios puros.

$\sqrt[2]{-9} = \sqrt[2]{9} \times \sqrt[2]{-1} = 3i$

$\sqrt[2]{-125} = \sqrt[2]{125 \times -1} = \sqrt[2]{5^3 \times -1} = \sqrt[2]{5^2 \times 5} \times \sqrt[2]{-1} = 5\sqrt[2]{5}i$

$3\sqrt[2]{-72} = 3\sqrt[2]{72 \times -1} = 3\sqrt[2]{3^2 \times 2^3 \times -1} = 3\sqrt[2]{3^2 \times 2^3} \times \sqrt[2]{-1} = 3 \times 3 \times 2\sqrt[2]{2}i = 18\sqrt[2]{2}i$

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación

$2x^2 + 75 = 3 \rightarrow 2x^2 = 3 - 75 \rightarrow 2x^2 = -72 \rightarrow x^2 = -\frac{72}{2} \rightarrow x^2 = \pm\sqrt[2]{-36}$

$\boldsymbol{x = \pm 6i}$

Potencias de i

Las **potencias de la unidad imaginaria i**, se obtienen a partir de las propiedades de la potenciación y la definición de i. Así,

$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

Las cuatro primeras potencias de i se denominan **potencias básicas de i**. Estas primeras potencias son distintas, pero a partir de i^5 se repiten las potencias en períodos de a cuatro. Así, $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$.

En general, para hallar el valor de una potencia de i con exponente mayor que cuatro se procede así:

- Se divide el exponente de la potencia entre cuatro y se expresa de la forma $4n + r$, donde n es el cociente y r es el residuo de la división.
- Se halla el resultado aplicando las propiedades de la potenciación y las potencias básicas de i.

Por ejemplo, para hallar i^{17} se sigue:

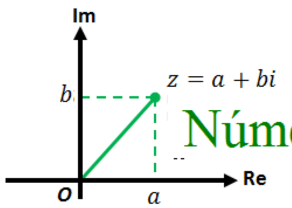
$i^{17} = i^{4 \cdot 4 + 1}$ *Se expresa 17 como 4n + r*

$= i^{4 \cdot 4} \cdot i^1$ *Se aplica la propiedad de la potenciación.*

$= (i^4)^4 \cdot i$ *Se aplica la propiedad de la potenciación.*

$= (1)^4 \cdot i$ *Se remplaza i^4 y se simplifica.*

$= i$



Números Complejos

El **conjunto de números complejos** está formado por los números cuya forma es $a + bi$ donde a y b son números reales. Este conjunto se simboliza con la letra $\mathbb{C}$. Es decir,

$$\mathbb{C} = \left\{ a + bi \, / \, a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \right\}$$

En el número complejo $a + bi$ se distinguen dos partes: el número a se llama **parte real** del número complejo y el número bi, se llama **parte imaginaria** del número complejo. Por ejemplo, en el número $-4 + 5i$, la parte real es -4 y la parte imaginaria es $5i$.

De lo anterior se deduce que todo número real puede expresarse como un número complejo de la forma $a = a + 0i$. Así, todo número real es un número complejo. Por lo tanto, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Del mismo modo, todo número imaginario se puede expresar como número complejo de la forma $bi = 0 + bi$. Así, todo número imaginario es un número complejo.

Todo número complejo se puede expresar de dos formas, así:

- En forma binomial, como se expresa por definición, es decir, de la forma $a + bi$. Por ejemplo, los números $-3 + 2i$ y $7 - \sqrt{3}i$ están escritos en forma binomial.
- En forma cartesiana, como pareja ordenada donde la primera componente es la parte real y la segunda componente es el coeficiente de la parte imaginaria. En general, el número $a + bi$ en forma cartesiana es (a, b).

  En relación con la forma cartesiana de los números complejos, se tiene que: dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales y sus partes imaginarias, respectivamente, son iguales. Es decir,

  $$a + bi = c + di \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

Ejemplos

1 Identificar en los siguientes números complejos la parte real y la parte imaginaria.

a. $2 - \sqrt{-9}$

$2 - \sqrt{-9} = 2 - 3i$

Se convierte $\sqrt{-9}$.

Luego, la parte real es 2 y la parte imaginaria es $-3i$.

b. $3 + \sqrt{16}$

$3 + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ Se realizan las operaciones.

Como $7 = 7 + 0i$, entonces, la parte real es 7 y la parte imaginaria es $0i$.

② **Expresar en forma binomial o cartesiana según el caso.**

a. $-9 - 32i$

$-9 - 32i$ está en forma binomial. La parte real es -9 y la parte imaginaria $-32i$.

Por lo tanto, el número $-9 - 32i$ en forma cartesiana es $(-9, -32)$.

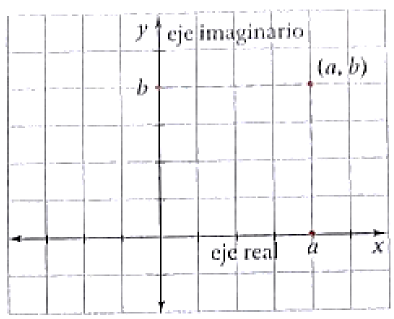
b. $(17, -\sqrt{2})$

$(17, -\sqrt{2})$ en forma binomial es $17 - \sqrt{2}i$.

Representación gráfica de los números complejos

Todo número complejo se puede representar geométricamente sobre el **plano complejo**.

El plano complejo es un sistema de coordenadas rectangulares, en el cual el eje horizontal es el **eje real** y el eje vertical es el **eje imaginario**. Así, para representar el número $a + bi$ se usa su forma cartesiana (a, b) donde la primera componente a, se ubica sobre el eje real, y la segunda componente b, se ubica sobre el eje imaginario.



Ejemplo

① **Escribir en forma binomial cada uno de los números complejos representados en el plano complejo.**

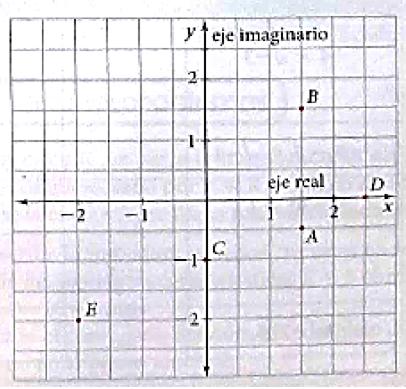
El punto A tiene como coordenadas $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, luego su forma binomial es $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$.

El punto B tiene como coordenadas $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, luego su forma binomial es $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$.

El punto C tiene como coordenadas $(0, -1)$, luego su forma binomial es $-i$.

El punto D tiene como coordenadas $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, luego su forma binomial es $\frac{5}{2}$.

El punto E tiene como coordenadas $(-2, -2)$, luego su forma binomial es $-2 - 2i$.



Conjugado de un número complejo

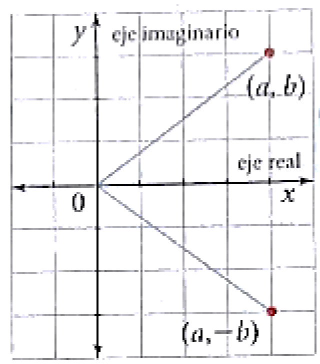
El **conjugado de un número complejo** es otro número complejo que se diferencia del anterior en el signo de la parte imaginaria.

El conjugado de un número complejo z se simboliza por $\bar{z}$.

Si $z = a + bi$, entonces, $\bar{z} = a - bi$.

Por ejemplo el conjugado de $z = -7 + 8i$ es $\bar{z} = -7 - 8i$ y el conjugado de $z = 9 - 2i$ es $\bar{z} = 9 + 2i$.

Un número complejo z y su conjugado $\bar{z}$ se ubican en forma simétrica respecto al eje real del plano complejo, como se muestra en la figura.



El opuesto del número complejo $a + bi$ es $-a - bi$. Por ejemplo, el opuesto del número complejo $-3 + 15i$ es $3 - 15i$.

OPERACIONES

La **suma** y la **resta** de dos complejos se definen como

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}) \pm (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{di}) = (\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{c})\boldsymbol{i}$$

Es decir, la suma (resta) se calcula sumando (restando) las partes reales y las partes imaginarias.

El **producto** de un real αα por un complejo z=a+bi es el complejo

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{i}$$

Nota técnica: en realidad, si tenemos en cuenta que los reales son complejos con parte imaginaria igual a 0, este producto es una consecuencia de la definición del producto de dos complejos.

EJEMPLOS

1. $Sumar\ los\ siguientes\ complejos\ z_1 = (1 + 2i),\ z_2 = (5 - 2i),\ z_3 = (-4 + 3i)$

Método 1: se ubican en un paréntesis los números correspondientes a las partes reales y en otro paréntesis las partes correspondientes a las imaginarias seguidas de i, así:

$z_1 + z_2 + z_3 = (1 + 5 - 4) + (2 - 2 + 3)i$ ⟹ $z_1 + z_2 + z_3 = \mathbf{2 + 3i}$

DOCENTE	JONATAN A. RIVERA	ÁREA	MATEMÁTICAS - TECNOLOGÍA
E-MAIL	jorivera@fmsnor.org	GRADO	NOVENO (9º)

Método 2: se ubica en forma de columnas los complejos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rl} z_1 + z_2 + z_3 = & 1 + 2i \\ & 5 - 2i \\ & -4 + 3i \\ \hline & \mathbf{2 + 3i} \end{array}$$

2. *Restar los siguientes complejos* $z_1 = (1 - 2i),\ z_2 = (5 + 2i),\ z_3 = (-7 - 4i)$

Método 1: Primero se debe cambiar el signo a los complejos $z_2\ y\ z_3$, luego se ubican en un paréntesis los números correspondientes a las partes reales y en otro paréntesis las partes correspondientes a las imaginarias seguidas de i, así:

$z_1 - z_2 - z_3 = (1 - 2i) - (5 + 2i) - (-7 + 4i)$ ⇒ $(1 - 2i) + (-5 - 2i) + (7 + 4i)$

⇒ $z_1 - z_2 - z_3 = (1 - 5 + 7) + (-2 - 2 + 4)i$ ⇒ $= 3 + 0i = \mathbf{3}$

Método 2: se ubica en forma de columnas los complejos, teniendo en cuenta que a los complejos $z_2\ y\ z_3$ se les debe cambiar sus correspondientes signos, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rl} z_1 - z_2 - z_3 = & 1 - 2i \\ & -5 - 2i \\ & 7 + 4i \\ \hline & \mathbf{3 + \ \ 0} \end{array}$$

PRODUCTO DE COMPLEJOS

Sean los complejos z1=a+biz1=a+bi y z2=c+diz2=c+di. Entonces, su **producto** es

$$\boldsymbol{(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i}$$

El producto es **conmutativo** y **asociativo**.

¿Por qué se calcula así el producto?

En realidad, la fórmula anterior es el resultado de calcular el producto como un producto de binomios:

$$\begin{aligned} & z_1 \cdot z_2 = \\ & = (a + bi) \cdot (c + di) = \\ & = ac + adi + bci + bdi^2 = \\ & = (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

EJEMPLOS

Calcular el siguiente producto de complejos sin aplicar la fórmula:

$$\mathbf{(1 + 2i) \cdot (5 - 2i)}$$

Multiplicamos los complejos como lo haríamos con un producto de binomios (cada sumando del primero por cada sumando del segundo):

$$\begin{aligned}&(1+2i)\cdot(5-2i)=\\&=1\cdot 5+1\cdot(-2i)+\\&\quad +2i\cdot 5+2i\cdot(-2i)=\\&=5-2i+10i-4i^2\end{aligned}$$

Escribimos $i^2=-1$:

$$\begin{aligned}&5-2i+10i-4i^2=\\&=5-2i+10i-4\cdot(-1)=\\&=5-2i+10i+4=\\&=9+8i\end{aligned}$$

El **inverso** de un complejo $z_1=a+bi\neq 0$ se define como

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bi})^{-1}=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}\boldsymbol{i}$$

Que es lo mismo que

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bi})^{-1}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{bi})$$

Es decir, el inverso de un complejo es su conjugado dividido entre el cuadrado de su módulo.

El inverso se define de este modo para que el producto z·z−1z·z−1 sea 1 (Problema 2).

Cociente:

El **cociente** de dos complejos $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di\neq 0$ es

$$\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bi}}{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{di}}=\frac{\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bd}}{\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{d}^2}+\frac{\boldsymbol{bc}-\boldsymbol{ad}}{\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{d}^2}\boldsymbol{i}$$

¿Por qué se calcula así el cociente?

Un cociente es el producto del numerador por el inverso del denominador, así que

$$\begin{aligned}&\frac{a+bi}{c+di}=\\&=(a+bi)\cdot(c+di)^{-1}=\\&=(a+bi)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2}-\frac{d}{c^2+d^2}i\right)=\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{c^2+d^2}\cdot(a+bi)\cdot(c-di)=\\&=\frac{1}{c^2+d^2}\cdot\big((ac+bd)+(bc-ad)i\big)=\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

PROFUNDIZACIÓN DE LOS CONTENIDOS.

Un número complejo se define de la forma $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$. Geogebra permite la representación de complejos sin más que escribir en la barra de entrada $a + bi$, por ejemplo, $3 + 4i$. Las últimas versiones de GeoGebra ya reconocen directamente la expresión $3 + 4i$, no obstante, para introducir la unidad imaginaria pulsamos la combinación de teclas Alt+i (windows), ctrl+i (mac) o seleccionamos en la caja de símbolos que se encuentra a la derecha de la barra de entrada la unidad imaginaria. A También es posible trabajar las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división con sus símbolos habituales +,-,· y / en la vista CAS.
También disponemos de las funciones elementales con números complejos:

	Comando	**Función**
Parte real (z)	x(z)	real(z)
Parte imaginaria(z)	y(z)	imaginaria(z)
Módulo(z)	Longitud[z]	abs(z)
Argumento(z)	Ángulo[z]	arg(z)
Conjugado	Refleja[z,EjeX]	conjugado(x)

Y los comandos:

- **Acomplejo[]** que transforma un vector o un punto en un número complejo expresado algebraicamente.

- **Apunto[]** que crea el punto que corresponde al número complejo dado, es decir, el afijo.
- **Apolar[]** que tiene por resultado el par *(módulo; argumento)*, es decir, la expresión trigonométrica del complejo dado.

RECUERDA SI TIENES ACCESO A INTERNET EN ESTOS SITIOS PUEDES COMPLEMENTAR TU CONOCIMIENTO:

- ✓ http://quiz.uprm.edu/tutorials_master/complejos/num_complejos_right.xhtml
- ✓ http://www.montereyinstitute.org/courses/DevelopmentalMath/TEXTGROUP-1-19_RESOURCE/U16_L4_T2_text_final_es.html

Te invitamos a que realices el siguiente organizador gráfico o rutina de pensamiento, teniendo en cuenta la información dada anteriormente. (No es necesario imprimir esta imagen, se puede realizar el diagrama en una hoja y resolver, para anexar en el taller que enviara a su profesor) **COMO PRIMER PUNTO DEL TALLER DE TRABAJO**